Physique Générale : Mécanique

03.05: Cinématique. Cycloïde

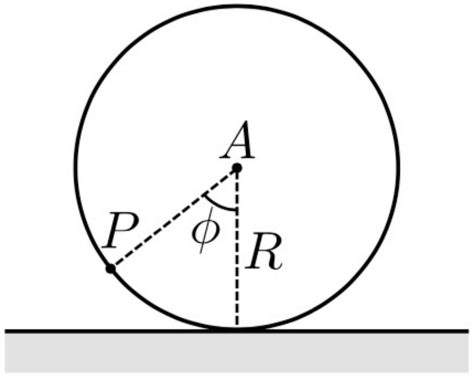
Sections SC, GC & SIE, BA1

Dr. J.-P. Hogge,
Swiss Plasma Center
École polytechnique fédérale de Lausanne

Faculté des sciences de base
Swiss Plasma Center

Cycloïde

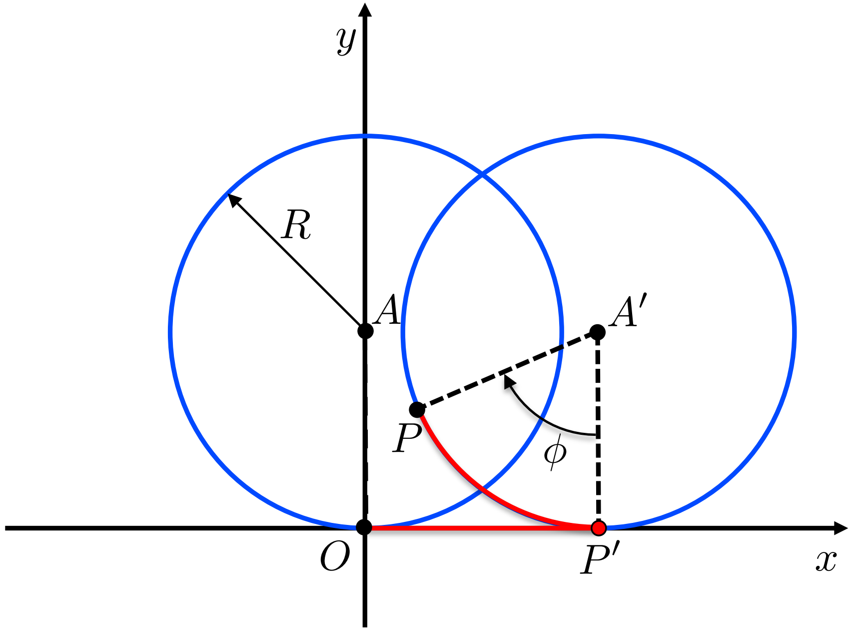
Soit une une roue de rayon R et d'axe A posée sur une surface horizontale. Soit P un point quelconque de sa circonférence. On suppose que la roue peut rouler sans glissement et que à $t_0 = 0$, on a $x_A(t_0) = 0$ et $\phi(t_0) = 0$.



(a) Donner la position des points A et P en coordonnées cartésiennes en fonction de l'angle ϕ (voir figure).

(b) Justifier que P perd le contact avec le sol selon un mouvement vertical. On pourra s'aider de l'approximation des petits angles.

(c) Tracer la trajectoire de P en vous aidant de quelques points caractéristiques.



Condition de non-glissement:

Si la roue tourne d'un angle ϕ , le déplacement de son centre est égal à la longueur de l'arc de cercle d'angle de ϕ

$$\left|\overrightarrow{AA'}\right| = R\phi$$

Rotation uniforme: $\phi = \omega t$

$$\omega = \text{cste} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$

Vitesse angulaire

a) Vecteur position en fonction de ϕ : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'P}$

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} R\phi \\ R \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{A'P} = \begin{pmatrix} -R\sin\phi \\ -R\cos\phi \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} R(\phi - \sin\phi) \\ R(1-\cos\phi) \end{pmatrix}$$

b) Justifier que P perd le contact avec le sol selon un mouvement vertical:

Comme le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire, on peut calculer ses composantes et évaluer sa direction pour ϕ petit.

$$\begin{pmatrix} v_{P_x} \\ v_{P_y} \end{pmatrix} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{d\phi}\underbrace{\frac{d\phi}{dt}}_{\omega} = \omega R \begin{pmatrix} 1-\cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$$

Constatation contre-intuitive: $\text{Si } \phi = 2n\pi \quad , \quad n \,\text{entier} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} v_{P_x} \\ v_{P_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

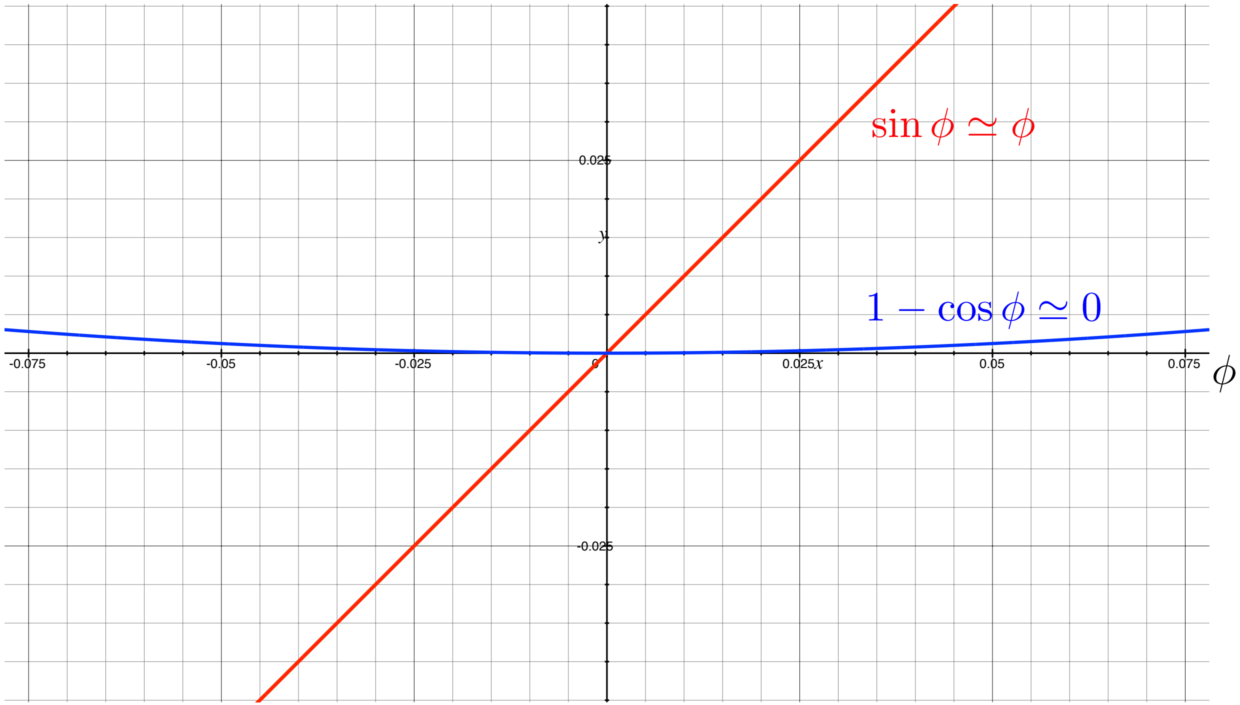
En l'absence de glissement, la vitesse du point de la roue qui est en contact avec le sol est nulle !

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Pour ϕ petit, on peut approximer (en faisant un développement limité)

$$\begin{cases} \sin\phi \simeq \phi \\ \cos\phi \simeq 1 \\ 1-\cos\phi \simeq 0 \end{cases}$$



■ Faculté des sciences de base

■ Swiss Plasma Center

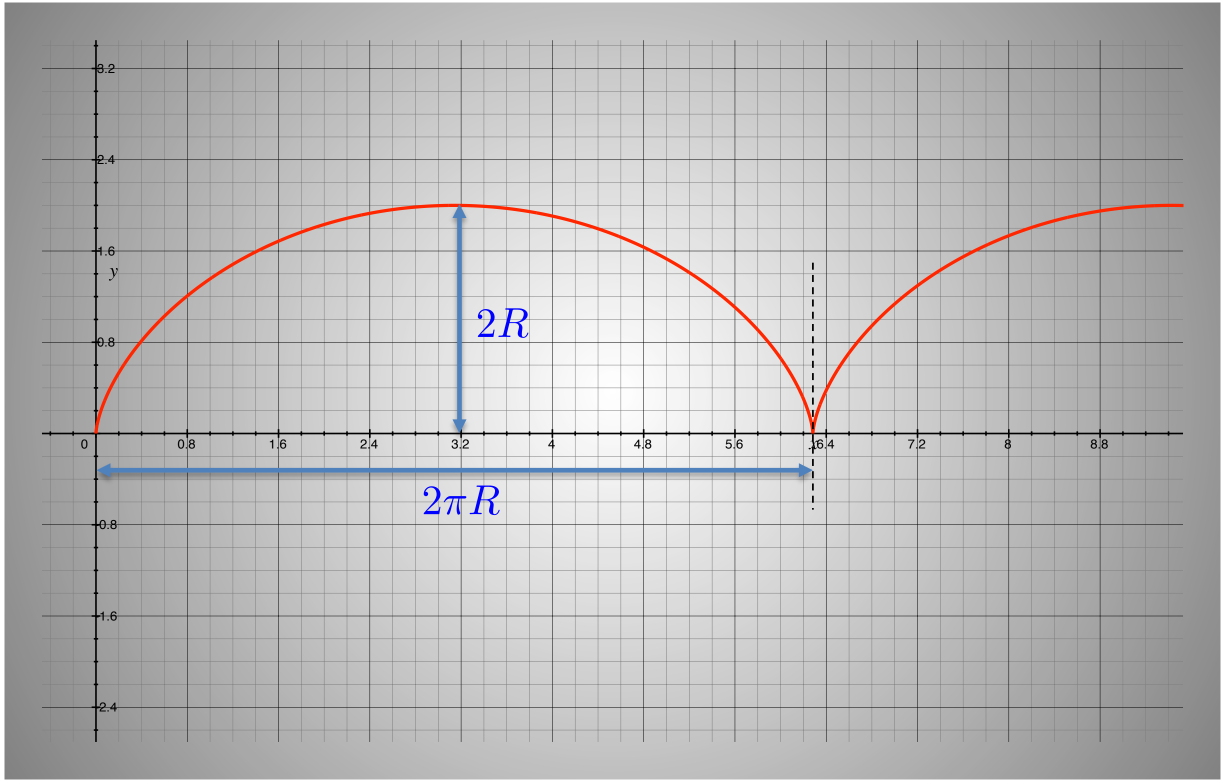
$$\phi \text{ petit} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} v_{P_x} \\ v_{P_y} \end{pmatrix} \simeq \omega R \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix}$$

L'angle que fait la trajectoire avec l'axe horizontal est alors

$$\tan\alpha = \frac{v_{P_y}}{v_{P_x}} \simeq \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \simeq \frac{\pi}{2}$$

Lorsque le point P quitte le sol, sa trajectoire est verticale.

b) Pour représenter la trajectoire, on utilise $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} R\,(\phi - \sin\phi) \\ R\,(1 - \cos\phi) \end{pmatrix}$



Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center